

圆盘探测器几何因子的一种计算方法

魏信苗 吴治华
(复旦大学)

本文给出了圆面探测器对圆面源的几何因子的一元积分形式。这种方法形式简单,结果精确,且计算方便。

关键词: 均匀放射源 圆探测器 几何因子 立体角

一、引言

在放射源活度的确定中,几何因子的计算十分重要。对圆盘型面源,几何因子的计算比较复杂。Gardner 等用多边形近似法得到了平均立体角 $\bar{\Omega}$ 的数值结果^[1]。倪光炯和陶宗英对 $\bar{\Omega}$ 的椭圆积分式用级数展开法进行了数值计算^[2],并被广泛使用。这些方法的原理较简单,但具体计算较复杂。另一类是用 Monte Carlo 法进行计算^[3],这类方法如要达到较小的相对误差,需要取大量的随机试验次数,因而计算时间较长。本文将介绍一种投影的方法计算几何因子(几何因子 η 与立体角的关系: $\eta = \frac{\bar{\Omega}}{4\pi}$),给出了几何因子的一元积分公式,它的特点是公式简单、数值积分方便、适合于微机计算,且速度较快。

二、几何因子的计算

设圆面源和圆面探测器同轴,两者相距为 a ,源的半径为 R_1 ,探测器的半径为 R_2 。假定源的放射性活度均匀,其单位面积的放射性活度为 w 。以源的圆心 O 为原点,以 OP 为 Z 轴作坐标系,方位角为 (θ, ϕ) ,如图1所示。

首先考虑放射源上某一面元 ds 沿与方位角 (θ, ϕ) 方向平行的辐射,则在这一方向的立体角元 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ 内发射粒子数为:

$$dn = wds(\sin\theta d\theta d\phi / 4\pi) \quad (1)$$

然后考虑源上所有点都沿这一方向发射光子,则在这一方位角 (θ, ϕ) 上发射的总粒子数为

$$dN = wR_1^2 \pi \sin\theta d\theta d\phi / 4\pi \quad (2)$$

这些粒子并不完全被探测器探测到,可以想象,当源面沿 (θ, ϕ) 投影到探测器所在平面上,只有其投影与探测器圆面重叠部分的粒子才被探测器记录,如图2所示。设重叠部分的面积为 $S(\theta, \phi)$, 这样探测器实际记录的粒子数为:

$$dN_o = wS(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi / 4\pi \quad (3)$$

由(2)式可得 $N = wR_1^2 \pi$, 可知 $w = N / (R_1^2 \pi)$, 对(3)式积分,并除以 N , 可得几何因子为

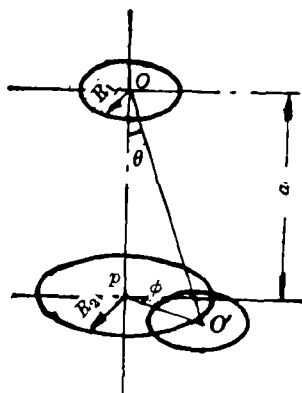


图1 圆形源和圆形探测器的几何位置图

Fig. 1 Disc source and disc
detector geometry

$$\eta = \frac{N_0}{N} = \frac{1}{R_1^2 \pi} \iint S(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi / 4\pi \quad (4)$$

由于源与探测器同轴, $S(\theta, \phi)$ 与 ϕ 无关, 简记为 $S(\theta)$ 。

如图 2 所示, 设 d 为探测器圆心到源的投影的圆心 O' 之间的距离, 显然 $d = atg\theta$ 。下面根据 d 所处的不同范围计算 $S(\theta)$ 。

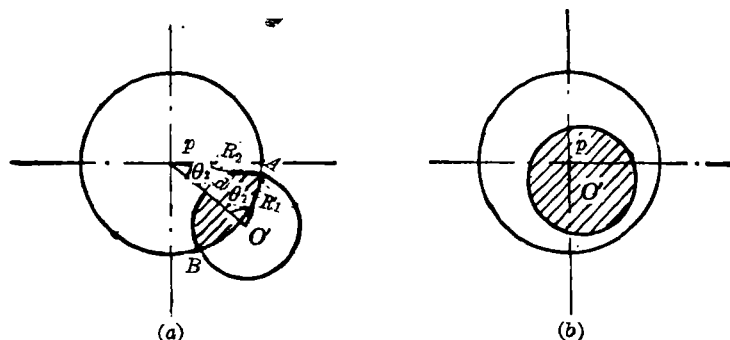


图 2 源在探测器平面上的投影关系图

Fig. 2 Project of source on detector plane

(a) $(R_2 - R_1) < d < (R_2 + R_1)$, (b) $d \leq (R_2 - R_1)$

1. 当 $R_1 \leq R_2$ 时

(1) $d \leq R_2 - R_1$

这种情况如图 2(b) 所示, 源的投影全落在探测器圆内, 有

$$S(\theta) = R_1^2 \pi \quad (5)$$

(2) $(R_2 - R_1) \leq d < (R_2 + R_1)$

这种情况如图 2(a) 所示, 重叠部分的面积为两个弓形面积之和, 其面积为

$$S(\theta) = R_1^2 \left(\theta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right) + R_2^2 \left(\theta_2 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \right) \quad (6)$$

由余弦定理可知 $\theta_1 = \arccos \left(\frac{R_1^2 + d^2 - R_2^2}{2R_1 d} \right)$, $\theta_2 = \arccos \left(\frac{R_2^2 + d^2 - R_1^2}{2R_2 d} \right)$ 。

(3) $d > (R_2 + R_1)$

这种情况下无重叠部分, 意味着在 (θ, ϕ) 方向上探测器接收不到源放射的光子

$$S(\theta) = 0 \quad (7)$$

由 d 和 θ 之间的关系, 根据 d 的几个区域, 可以把 θ 划分成相应的几个区域, 其分点为

$\theta_3 = \arctg \left(\frac{R_2 - R_1}{a} \right)$, $\theta_4 = \arctg \left(\frac{R_2 + R_1}{a} \right)$, 代入(4)式, 可得

$$\eta = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \theta_3 \right) + \int_{\theta_3}^{\theta_4} \left[\left(\theta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right) / 2\pi + \frac{R_2^2}{2\pi R_1^2} \left(\theta_2 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \right) \right] \sin \theta d\theta \quad (8)$$

2. 当 $R_1 > R_2$ 时

(1) $d \leq (R_1 - R_2)$

这种情况下, 重叠部分面积为

$$S(\theta) = R_2^2 \pi \quad (5)'$$

对于其它两种情况与 $R_1 < R_2$ 时的情况相同, 这样可以得到几何因子

$$\eta = \frac{R_1^2}{2R_1^2} (1 - \cos\theta_3) + \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_3}^{\theta_4} \left[\left(\theta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right) + \frac{R_2^2}{R_1^2} \left(\theta_2 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \right) \right] \sin\theta d\theta \quad (8)'$$

表1 各种 R_2/a 和 R_1/a 情况下的圆形源对圆形探测器的平均立体角Table 1 Disc source to disc detector solid angle values for different R_2/a and R_1/a

R_2/a	R_1/a									
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.0310	0.0303	0.0293	0.0279	0.0261	0.0248	0.0231	0.0214	0.0199	0.0181
0.2	0.1212	0.1187	0.1148	0.1098	0.1040	0.0978	0.0913	0.0850	0.0788	0.0730
0.3	0.2633	0.2583	0.2505	0.2402	0.2283	0.2153	0.2017	0.1882	0.1749	0.1623
0.4	0.4468	0.4392	0.4271	0.4112	0.3923	0.3714	0.3495	0.3272	0.3052	0.2839
0.5	0.6600	0.6501	0.6341	0.6120	0.5875	0.5590	0.5284	0.4969	0.4653	0.4344
0.6	0.8915	0.8799	0.8610	0.8357	0.8049	0.7697	0.7314	0.6913	0.6504	0.6098
0.7	1.1316	1.1189	1.0983	1.0702	1.0356	0.9955	0.9512	0.9038	0.8547	0.8052
0.8	1.3725	1.3594	1.3380	1.3087	1.2720	1.2289	1.1805	1.1278	1.0724	1.0154
0.9	1.6086	1.5957	1.5743	1.5448	1.5076	1.4634	1.4129	1.3572	1.2975	1.2350
1.0	1.8361	1.8237	1.8030	1.7743	1.7378	1.6939	1.6432	1.5865	1.5247	1.4590
1.1	2.0527	2.0410	2.0214	1.9941	1.9591	1.9167	1.8673	1.8113	1.7495	1.6827
1.2	2.2571	2.2462	2.2279	2.2023	2.1695	2.1294	2.0822	2.0283	1.9680	1.9020
1.3	2.4489	2.4388	2.4220	2.3983	2.3678	2.3305	2.2862	2.2352	2.1777	2.1140
1.4	2.6281	2.6189	2.6035	2.5818	2.5538	2.5193	2.4783	2.4308	2.3767	2.3164
1.5	2.7951	2.7867	2.7727	2.7530	2.7274	2.6959	2.6582	2.6144	2.5642	2.5078
1.6	2.9506	2.9430	2.9303	2.9124	2.8891	2.8601	2.8261	2.7859	2.7398	2.6877
1.7	3.0952	3.0883	3.0768	3.0606	3.0395	3.0135	2.9823	2.9457	2.9036	2.8558
1.8	3.2297	3.2235	3.2131	3.1985	3.1794	3.1558	3.1275	3.0943	3.0561	3.0125
1.9	3.3550	3.3493	3.3399	3.3267	3.3094	3.2881	3.2625	3.2324	3.1977	3.1581
2.0	3.4716	3.4665	3.4580	3.4460	3.4304	3.4111	3.3879	3.3607	3.3293	3.2934
2.1	3.5803	3.5757	3.5680	3.5572	3.5430	3.5256	3.5046	3.4800	3.4515	3.4190
2.2	3.6818	3.6776	3.6707	3.6608	3.6480	3.6322	3.6132	3.5909	3.5651	3.5357
2.3	3.7767	3.7729	3.7666	3.7576	3.7460	3.7317	3.7145	3.6942	3.6709	3.6442
2.4	3.8654	3.8620	3.8562	3.8481	3.8376	3.8246	3.8089	3.7906	3.7694	3.7452
2.5	3.9486	3.9455	3.9403	3.9329	3.9233	3.9114	3.8972	3.8805	3.8613	3.8393
2.6	4.0267	4.0239	4.0191	4.0123	4.0036	3.9928	3.9798	3.9646	3.9471	3.9271
2.7	4.1001	4.0975	4.0931	4.0869	4.0790	4.0691	4.0573	4.0434	4.0274	4.0092
2.8	4.1691	4.1667	4.1627	4.1571	4.1498	4.1408	4.1300	4.1173	4.1027	4.0861
2.9	4.2342	4.2320	4.2283	4.2232	4.2165	4.2082	4.1983	4.1867	4.1734	4.1582
3.0	4.2945	4.2936	4.2902	4.2855	4.2793	4.2717	4.2626	4.2520	4.2398	4.2259
3.1	4.3536	4.3518	4.3487	4.3443	4.3386	4.3316	4.3233	4.3135	4.3023	4.2895
3.2	4.4085	4.4068	4.4039	4.3999	4.3947	4.3882	4.3805	4.3716	4.3612	4.3495
3.3	4.4605	4.4589	4.4563	4.4525	4.4477	4.4418	4.4347	4.4264	4.4169	4.4061
3.4	4.5098	4.5083	4.5059	4.5024	4.4980	4.4925	4.4859	4.4783	4.4695	4.4595
3.5	4.5566	4.5553	4.5530	4.5498	4.5457	4.5406	4.5345	4.5274	4.5193	4.5101
3.6	4.6011	4.5999	4.5977	4.5948	4.5910	4.5862	4.5806	4.5740	4.5663	4.5580
3.7	4.6434	4.6423	4.6403	4.6376	4.6340	4.6296	4.6244	4.6183	4.6113	4.6034
3.8	4.6838	4.6827	4.6809	4.6783	4.6750	4.6709	4.6661	4.6604	4.6539	4.6465
3.9	4.7223	4.7212	4.7195	4.7172	4.7141	4.7103	4.7057	4.7005	4.6944	4.6876
4.0	4.7590	4.7580	4.7564	4.7542	4.7513	4.7478	4.7435	4.7386	4.7330	4.7266

* R_1 是源的半径, R_2 是探测器的半径, a 是源和探测器之间的距离。 R_1 is source radius, R_2 is detector radius, a is the distance between source and detector.

R_1/a	R_2/a									
	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0.1	0.0170	0.0157	0.0145	0.0134	0.0124	0.0115	0.0107	0.0100	0.0093	0.0087
0.2	0.0675	0.0624	0.0577	0.0535	0.0495	0.0460	0.0428	0.0398	0.0371	0.0347
0.3	0.1504	0.1393	0.1290	0.1196	0.1109	0.1030	0.0958	0.0893	0.0833	0.0778
0.4	0.2637	0.2447	0.2271	0.2108	0.1958	0.1820	0.1695	0.1580	0.1474	0.1378
0.5	0.4048	0.3767	0.3503	0.3257	0.3030	0.2821	0.2629	0.2453	0.2292	0.2144
0.6	0.5703	0.5324	0.4964	0.4627	0.4313	0.4022	0.3754	0.3507	0.3279	0.3070
0.7	0.7562	0.7085	0.6629	0.6196	0.5789	0.5409	0.5057	0.4730	0.4428	0.4150
0.8	0.9580	0.9015	0.8465	0.7937	0.7436	0.6965	0.6523	0.6112	0.5731	0.5377
0.9	1.1711	1.1070	1.0437	0.9822	0.9231	0.8669	0.8138	0.7640	0.7175	0.6742
1.0	1.3906	1.3208	1.2509	1.1818	1.1146	1.0499	0.9882	0.9298	0.8748	0.8233
1.1	1.6120	1.5387	1.4639	1.3890	1.3150	1.2428	1.1732	1.1067	1.0435	0.9840
1.2	1.8311	1.7564	1.6791	1.6002	1.5212	1.4430	1.3666	1.2927	1.2219	1.1546
1.3	2.0447	1.9706	1.8926	1.8119	1.7298	1.6473	1.5656	1.4856	1.4080	1.3336
1.4	2.2500	2.1781	2.1014	2.0209	1.9376	1.8528	1.7674	1.6828	1.5998	1.5192
1.5	2.4453	2.3768	2.3029	2.2243	2.1418	2.0565	0.9695	1.8819	1.7948	1.7093
1.6	2.6295	2.5653	2.4953	2.4199	2.3398	2.2558	2.1689	2.0802	1.9908	1.9018
1.7	2.8022	2.7426	2.6772	2.6061	2.5297	2.4485	2.3634	2.2753	2.1853	2.0945
1.8	2.9634	2.9086	2.8481	2.7818	2.7099	2.6327	2.5509	2.4650	2.3761	2.2851
1.9	3.1134	3.0633	3.0077	2.9465	2.8797	2.8073	2.7297	2.6474	2.5611	2.4716
2.0	3.2527	3.2072	3.1565	3.1003	3.0387	2.9716	2.8990	2.8212	2.7386	2.6521
2.1	3.3822	3.3408	3.2946	3.2435	3.1870	3.1252	3.0579	2.9853	2.9075	2.8249
2.2	3.5023	3.4648	3.4229	3.3764	3.3249	3.2684	3.2065	3.1393	3.0667	2.9890
2.3	3.6139	3.5800	3.5420	3.4997	3.4530	3.4014	3.3448	3.2831	3.2160	3.1437
2.4	3.7178	3.6869	3.6525	3.6142	3.5717	3.5249	3.4733	3.4169	3.3553	3.2885
2.5	3.8144	3.7865	3.7552	3.7205	3.6820	3.6394	3.5926	3.5411	3.4849	3.4236
2.6	3.9045	3.8791	3.8508	3.8192	3.7843	3.7457	3.7031	3.6564	3.6051	3.5492
2.7	3.9886	3.9656	3.9398	3.9111	3.8794	3.8443	3.8057	3.7632	3.7167	3.6657
2.8	4.0673	4.0463	4.0228	3.9968	3.9679	3.9360	3.9010	3.8624	3.8201	3.7737
2.9	4.1410	4.1218	4.1004	4.0767	4.0504	4.0214	3.9895	3.9545	3.9160	3.8739
3.0	4.2102	4.1926	4.1731	4.1514	4.1274	4.1010	4.0720	4.0401	4.0051	3.9669
3.1	4.2751	4.2590	4.2411	4.2213	4.1994	4.1753	4.1489	4.1198	4.0880	4.0532
3.2	4.3363	4.3215	4.3051	4.2869	4.2669	4.2449	4.2207	4.1942	4.1652	4.1335
3.3	4.3939	4.3803	4.3652	4.3486	4.3302	4.3100	4.2879	4.2637	4.2372	4.2083
3.4	4.4483	4.4358	4.4219	4.4066	4.3897	4.3712	4.3509	4.3287	4.3045	4.2781
3.5	4.4997	4.4882	4.4754	4.4612	4.4457	4.4287	4.4101	4.3897	4.3675	4.3433
3.6	4.5484	4.5377	4.5259	4.5129	4.4985	4.4828	4.4657	4.4470	4.4266	4.4044
3.7	4.5945	4.5846	4.5737	4.5616	4.5484	4.5339	4.5181	4.5009	4.4822	4.4618
3.8	4.6383	4.6291	4.6190	4.6078	4.5956	4.5822	4.5676	4.5517	4.5344	4.5157
3.9	4.6799	4.6714	4.6620	4.6516	4.6403	4.6279	4.6143	4.5997	4.5837	4.5664
4.0	4.7195	4.7115	4.7028	4.6932	4.6826	4.6711	4.6586	4.6450	4.6302	4.6143

三、结 论

根据面探测器对面源的几何因子(8)或(8)'式可见积分式内被积函数并不复杂,利用微机用不太长的程序(见附录)就可进行计算。在程序中用 Q 代替公式(8)、(8)'中的 θ_s , Q_0 代替其中的 θ_d , Q_1 、 Q_2 对应于 θ_1 、 θ_2 。我们把积分区域分成1000个积分单元。选取 R_1/a 自0.1—

2.0, R_2/a 自 0.1—4.0, 步长均为 0.1, 计算结果见表 1。与文献[2]用的数展开法计算的结果比较, 前 6 位是相同的, 与文献[1]用多边形近似法的结果比较, 前 4 位相同, 因此我们认为本算法的精度至少有 4 位, 在实际应用中已足够了。如果把积分区域分成更多的单元(例如 4000 个), 精度还可以提高。文献[3]用 Monte Carlo 法的结果的精度只有 1%, 和本计算结果基本相符。可见, 本计算方法不仅计算简单, 而且又有足够的精度, 具有一定的实用价值。

附录 几何因子计算程序

```

10 REM the program of the solid angle of the disc source to disc detector
20 INPUT "source radius R1"; R1
30 INPUT "detector radius R2"; R2
40 N=1000; W1=0; W2=0; A=1; PI=4*ATN(1); L=R1*R1; M=R2*R2; K=A*A
50 Q0=ATN((R1+R2)/A); Q=ATN(ABS(R2-R1)/A); T=(Q0-Q)/N
60 IF R1>R2 THEN 90
70 W1=(1-COS(Q))/2
80 GOTO 100
90 W1=(1-COS(Q)*M/(2*L)
100 FOR I=0 TO N-1
110 F=(I+0.5)*T+Q
120 X=(L-M+K*TAN(F)*TAN(F))/(2*A*TAN(F)*R1)
130 Y=(M-L+K*TAN(F)*TAN(F))/(2*A*TAN(F)*R2)
140 Q1=ATN(SQR(1-X*X)/X)
150 IF Q1>0 THEN 170
160 Q1=Q1+PI
170 Q2=ATN(SQR(1-Y*Y)/Y)
180 IF Q2>0 THEN 200
190 Q2=Q2+PI
200 W2=W2+(ABS(Q1)-SIN(2*Q1)/2+M*(ABS(Q2)-SIN(2*Q2)/2)/L)*SIN(F)
    *T/(2*PI)
210 NEXT I
220 P=W1+W2; V=4*PI*P
230 PRINT "v="; V
240 END

```

参 考 文 献

- [1] R. P. Gardner and K. Veighere, *Nucl. Instr. Meth.*, 93 (1971), 163.
- [2] 倪光炯和陶宗英, 核技术, (1979), 4:14.
- [3] L. Wielopolski, *Nucl. Instr. Meth.*, 143(1977), 577.

A new and simple method of calculating geometric factor of disc detector

Wei Xinmiao Wu Zhihua

(Fudan University)

Abstract

The solid angle for a disc source parallel to a disc detector has been determined using a one dimension integral. The result coincided with those obtained using other calculation methods at 10^{-4} level.

Keywords: Geometric factor

Solid angle

Disc source

(1989年7月10日收到)